

# A noção de escala nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Wagner Marcelo Pommer<sup>1</sup>, Clarice Peres Carvalho Retroz Pommer<sup>2</sup>

## Resumo:

Usualmente, a escala é um tema matemático trabalhado a partir do 3º ciclo do Ensino Fundamental como uma ferramenta para se construir gráficos cartesianos e mapas. A presente pesquisa se propôs a verificar se e em que medida é possível introduzir a noção de escala, no âmbito dos números naturais, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Desse modo, elaboramos uma situação de aprendizagem para viabilizar a conversão entre a linguagem natural (o texto), a linguagem aritmética (a operação de contagem) e o registro geométrico (a reta numérica), de modo a ampliar o repertório de compreensão, conforme expõe Duval (2003). A situação de aprendizagem foi aplicada em uma aula de Matemática no 3º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública da cidade de São Paulo, no ano de 2011. As manifestações escritas e orais dos alunos revelaram que a conversão entre as linguagens favoreceu a introdução da noção de escala.

**Palavras-chave:** números naturais; escala; Ensino Fundamental; registros de representação semiótica.

---

1 Graduado em Física e Eng<sup>a</sup> Mecânica, com doutorado em Educação Matemática. Professor da graduação e pós-graduação do curso de Ciências-Licenciatura da Universidade Federal de São Paulo, ligado ao departamento de Ciências Exatas e da Terra (UNIFESP-DCET-Diadema-SP).

E-mail: wagner.pommer@unifesp.br

2 Mestre em Psicologia da Educação e professora de 1º grau da rede pública e particular de São Paulo.

E-mail: clazort@gmail.com

# The scale's notion in the early years of Elementary School

*Wagner Marcelo Pommer, Clarice Peres Carvalho Retroz Pommer*

**Abstract:**

Usually, the scale is a mathematical topic treated along Elementary School as a tool to build Cartesian graphs and maps. This research aimed to verify whether and at what extension it is possible to introduce the notion of scale in the context of natural numbers in the early years of Elementary School. In this way, we elaborated a learning situation to enable the cognitive operation conversion between the natural language (the text), the language of arithmetic (the counting process) and the geometrical register (the straight number line), in a way to enlarge the repertoire of meanings, according to Duval (2003). The learning situation was applied at a the third grade of Elementary School math class in a public school located at São Paulo, in 2011. The written and oral student's manifestations revealed that the conversion between languages favored introducing the scale's notion.

**Keywords:** whole numbers; scale's notion; Elementary School; registers of semiotic representations.

## 1 Introdução

Muitos professores gostariam que os alunos soubessem organizar dados numéricos presentes em textos e que conseguissem mobilizá-los em diversos contextos, como aqueles relacionados a representações gráficas.

A organização de dados pode se fazer presente com relação a situações envolvendo o bloco grandezas e medidas. Nos PCN, descrito em Brasil (1997), há menção sobre a sua importância pela relevância social e pelo caráter utilitário.

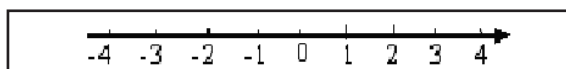
Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano. As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da **idéia de proporcionalidade e escala, e um campo fértil para uma abordagem histórica** (BRASIL, 1997, p. 39-40, grifo nosso).

Temos, por hipótese, que, além de ler, de interpretar e de descrever as representações gráficas, como apontado no destacado documento nacional, deve-se fazer presente um trabalho que mostre como organizar dados em tabelas e como representá-los na forma gráfica. Ainda, acreditamos que isso seja importante e possível desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os PCN (BRASIL, 1997, p. 38) indicam que a área de Matemática deve estimular os alunos a desenvolverem a habilidade de localizar “[...] na reta numérica, números racionais na forma decimal”. Porém, acrescentamos que seja igualmente importante trabalhar na linha numérica os números naturais e inteiros, desde o Ensino Fundamental.

Na linha numérica, reta numérica ou reta orientada, há uma marcação do zero que indica a origem, além da marcação de alguns valores. Nas séries iniciais do Ensino Fundamental, os números se limitam aos inteiros. Com relação à marcação de referência dos números inteiros, estes se organizam em sentido crescente, conforme exposto na Figura 1.

**Figura 1: A reta orientada**



Fonte: Caraça (1970).

Esse tipo de forma indica um modelo geométrico, a reta orientada, descrita em Caraça (1970), que se constitui em um tipo de registro de representação geométrica de números naturais, inteiros ou reais. Usualmente, a reta orientada surge, na escolaridade básica, a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, no âmbito dos números inteiros.

Analisando-se a Figura 1, podemos identificar um importante fator associado à reta orientada ou reta numérica: é a indicação implícita da escala de representação.

Algumas pesquisas mais atuais, como os relatos de Friel, Curcio e Brigh (2001), Guimarães, Gitirana e Roazzi (2001), Guimarães (2002), Lemos e Gitirana (2002), Bruno e Espinel (2005), Vieira e Bellemain (2007), Albuquerque (2010), Lima (2010), Heeffer (2011), Silva (2012), Silva (2014), Evangelista e Guimarães (2015), revelaram dificuldades de alunos e professores da escola básica quanto à compreensão da noção de escala. Tais pesquisas situam, em comum, a necessidade de compreensão do conceito de proporcionalidade envolvido na construção da escala, que tem desdobramentos posteriores nas necessárias interpretação e análise de gráficos.

Nos documentos oficiais, como nos PCN (BRASIL, 1997), há a proposta do trabalho com escalas como uma forma de relação entre duas medidas de comprimento, associada ao conceito de semelhança e de proporcionalidade, a partir do 7º ou do 8º ano, sem necessariamente se utilizar ou se conectar com a reta numérica.

Apesar das considerações curriculares, Spinillo (1997) e Vieira e Bellemain (2007) têm citado a tendência exagerada da operacionalização quase que exclusiva pela ‘regra de três’, em detrimento do uso conceitual da proporcionalidade, em questões envolvendo as escalas.

Assim, urge a composição de situações de aprendizagem para se introduzir o desenvolvimento da noção de escala nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Em face desses pressupostos, esta pesquisa se propôs a verificar se e em que medida é possível introduzir a noção de escala, no âmbito dos números naturais, nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

## **2 Obstáculos didáticos com relação à construção da noção de escala**

A escala é uma noção a ser construída durante a escolaridade básica; porém, há obstáculos de ordem didática para tal introdução.

Segundo Iglioni (2002), Brousseau propõe que os obstáculos didáticos são aqueles que dependem da escolha de um projeto do sistema educativo, resultado de uma transposição didática em que o professor pode dificilmente renegociar, considerando-se o contexto da sala de aula.

Henry (1991) coloca que os obstáculos de origem didática se originam quando se utilizam estratégias de ensino que levam à formação de conhecimentos errôneos ou incompletos que, posteriormente, dificultam ou impedem o desenvolvimento da conceitualização.

Desse modo, o obstáculo didático é oriundo da prática pedagógica que não auxilia o desenvolvimento cognitivo do aluno. Pode-se reconhecer os obstáculos didáticos, advindos do tema das escalas, por meio de algumas pesquisas com livros didáticos.

Albuquerque (2010) constatou que os materiais escolares dos anos iniciais do Ensino Fundamental propõem atividades envolvendo a reta numérica, de modo semelhante ao apresentado na Figura 1. Porém, em grande parte, já estão previamente marcados os valores aritméticos a serem utilizados. Em particular, a maioria dos exemplos dos livros didáticos aponta o espaçamento entre duas marcações consecutivas como equivalendo a uma (1) unidade.

Esse tipo recorrente de situação pode induzir no aluno uma falsa concepção de que as escalas sempre estarão indicadas, assim como o espaçamento unitário é algum tipo de padrão da Matemática. Essa espécie de arquétipo, usual em manuais escolares de Matemática, representa um obstáculo didático ao desenvolvimento da noção de escala.

Outro obstáculo didático é possível de ser observado a partir da análise de livros didáticos do Ensino Fundamental, feita por Albuquerque (2010). O autor percebeu que, no tópico que envolve gráficos estatísticos, muitos manuais relativos ao 7º e 8º anos já fornecem aos alunos

[...] os eixos pré-definidos para que ele apenas represente a informação no gráfico. Esse tipo de atividade não é capaz de abarcar a várias habilidades, como estabelecer a escala e definir o intervalo, que são muito importantes para o desenvolvimento do conhecimento estatístico pelo aluno. Somente nove (9) das quinhentas e quarenta e cinco (545) atividades relacionadas à representação em gráficos solicitavam que os alunos construíssem um gráfico precisando estabelecer uma escala (ALBUQUERQUE, 2010, p. 34).

A pesquisa diagnóstica de Melo e Bellemain (2004) aponta a necessidade de atividades que viabilizem a compreensão do conceito de escala, de modo a superar erros e dificuldades dos alunos relativos à aprendizagem das grandezas geométricas.

Segundo Henry (1991), o ato de reconhecer o(s) obstáculo(s) didático(s) presentes no ensino permite ao professor ou ao pesquisador rever a apresentação de conceitos, de modo a superar as dificuldades vivenciadas pelos alunos.

Nesse sentido, há uma possibilidade de se iniciar um trabalho relacionando a escala com a operação de contagem, mediado pela possibilidade de organizar os dados fornecidos ou obtidos, em ordem crescente (ou decrescente), aliados à reta numérica.

Essa possibilidade de caminho encontra ressonância na posição de Chevallard, Bosch e Gascón (2001). Estes autores expõem que as noções paramatemáticas são objetos de saber auxiliares, necessários ao ensino dos objetos matemáticos propriamente ditos, mas não se constituem diretamente em objeto de ensino.

O caso do conceito de escala se constitui em uma noção paramatemática, ou seja, é geralmente concebido pelo presente sistema de ensino como um objeto pré-construído, utilizado somente como ferramenta, e sem a necessidade de um estudo mais focalizado como objeto na Matemática, conforme destaca de Vieira e Bellemain (2007).

Em decorrência, a área de Matemática pouco trabalha o tema das escalas como um objeto explícito. Assim, a exploração desse tema é geralmente realizada pelas ciências

exatas, biológicas, naturais e sociais, como ferramenta para situações de construção de mapas e gráficos cartesianos.

Nossa posição é a de que a noção de escala deva ser trabalhada como um tema articulador na própria área da Matemática, em contextos diversos e em situações de aprendizagem apropriadas, de modo a, posteriormente, ser passível de se transformar em uma ferramenta para as demais ciências, tornando-se uma noção paramatemática, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

Na presente pesquisa, antevemos uma possibilidade de utilizar a organização de dados numéricos, expressos em textos de situações de aprendizagem, que então seriam representados em uma reta numérica.

Esse tipo de possibilidade de mediação encontra referência nos PCN, conforme expresso em Brasil (1997). Este documento curricular oficial sugere desenvolver um trabalho com as operações aritméticas envolvendo a “[...] contagem em escalas ascendentes e descendentes de um em um, de dois em dois, de cinco em cinco de dez em dez, etc., a partir de qualquer número dado” (BRASIL, 1997, p. 50).

Nesse sentido, a representação de escalas por meio da reta numérica constitui um possível modo de articulação de conhecimentos envolvendo as operações de contagem, situando uma confluência do contexto da Aritmética com aspectos geométricos da reta numérica.

### 3 Referencial teórico

Para verificar se e em que medida é possível introduzir a noção de escala nos anos iniciais do Ensino Fundamental, elaboramos uma situação de aprendizagem que buscou articular a representação geométrica (a reta numérica), a linguagem natural (o texto) e a linguagem aritmética (a operação de contagem).

Heffer (2011) destaca que a reta numérica e a escala são assuntos relativamente recentes no ensino básico, devido à influência da ciência de origem europeia.

The number line is currently one of the important tools for teaching basic arithmetical concepts such as natural and real numbers in primary and secondary education. Hans Freudenthal (1983) calls this mental object a ‘device beyond praise’ (HEEFFER, 2011, p. 863)<sup>3</sup>.

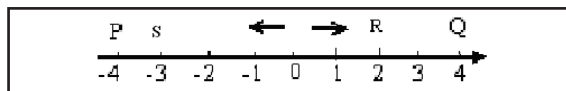
Caraça (1970) aponta uma visão cinematográfica para a reta numérica. Para o autor, um ponto material qualquer pode sofrer sucessivos deslocamentos, a partir de um marco inicial (que pode ser adotado como origem dos espaços ou zero), em dois possíveis sentidos: para a direita ou para a esquerda. A Matemática estabeleceu os pontos à direita da origem como positivos, e aqueles à esquerda como negativos, conforme

---

<sup>3</sup> A reta numérica é certamente uma das mais importantes ferramentas para se ensinar os conceitos aritméticos básicos, tal qual os números naturais e reais no ensino fundamental e médio. Hans Freudenthal (1983) chamava este objeto mental de um ‘artefato que atende as preces’ (HEEFFER, 2011, p. 863, tradução nossa).

se observa na Figura 2. Assim, a reta orientada é aquela que possui um ponto de referência, indicando a origem  $O$ , uma direção e dois sentidos: de  $O$  para a direita, onde são posicionados sequencialmente e em ordem crescente os valores positivos, e de  $O$  para a esquerda, onde são considerados os valores negativos.

**Figura 2: A reta orientada, com indicação de alguns valores inteiros.**



Fonte: Caraça (1970).

Heeffer (2011) destaca na reta numérica um tipo de representação de números em uma linha onde os pontos indicam números inteiros (ou reais), sendo que a distância entre os pontos corresponde à diferença aritmética entre os números representados.

A partir da definição, Heeffer (2011) destaca que a reta numérica pode ser entendida como

[...] a model for reasoning, teaching and understanding concepts and properties in mathematics. Models presuppose some kind of isomorphism between the model and what is modeled. Properties of a straight line can be exploited to model arithmetical properties. A straight line can be extended into infinity; so can natural numbers. A straight line has two directions; also negative integers can go to  $-\infty$ . The linear aspect of a line can be exploited as a scale, so that equal distances on the line always correspond to equal differences between numbers<sup>4</sup> (HEEFFER, 2011, p. 864).

As escalas representam, no viés geométrico, um modo de indicar intervalos ou de representar distâncias entre certas posições ou espaços demarcados. De modo mais amplo, as escalas se constituem em um tipo de configuração ou representação gráfica que envolve uma indicação de um tipo de conjunto numérico (inteiros ou reais), o que remete à relação entre certos números ou grandezas envolvidas.

A escala presente na reta numérica envolve ao menos dois tipos de registros de representação semiótica<sup>5</sup>: uma figura geométrica, representada pela reta numérica, e o sistema de escrita numérico que, no nosso caso, se reduz aos números naturais.

Os registros de representação semióticos utilizados na Matemática são estudados por Duval (2003, p. 14), sendo indicados no Quadro 01.

4 [...] um modelo para o raciocínio, o ensino e a compreensão de conceitos e propriedades em matemática. Modelos pressupõem algum tipo de isomorfismo entre o modelo e o que é modelado. Propriedades de uma reta podem ser exploradas para modelar propriedades aritméticas. Uma reta pode ser estendida para o infinito; assim como podem os números naturais. Uma reta tem dois sentidos; também os números inteiros negativos podem ir para  $-\infty$ . O aspecto linear de uma reta pode ser explorada como uma escala, de modo que distâncias iguais na linha sempre correspondem às diferenças iguais entre números (HEEFFER, 2011, p. 864, tradução nossa).

5 Uma análise etimológica feita em Aurélio (2003) revela que o termo semiótica provém do grego *semeiotiké* (*téchne*), denotando uma arte dos sinais ou a ciência geral que estuda as mudanças ou translações sofridas, no tempo e no espaço, da significação das palavras, assim como a relação de significação entre sinais e signos, bem como daquilo que representam para a formação de sentido aos enunciados.

**Quadro 01: Os vários registros de representação semióticos propostos por Duval (2003)**

	<b>Representação discursiva</b>	<b>Representação não-discursiva</b>
<b>Registros multifuncionais</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Língua natural</li> <li>- Associações verbais (conceituais)</li> <li>- Forma de raciocinar: argumentação/ dedução</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figuras geométricas planas ou em perspectiva (dimensão 0, 1, 2 ou 3).</li> <li>- Apreensão operatória e não somente perceptiva</li> <li>- Construção geométrica</li> </ul>
<b>Registros monofuncionais</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sistemas de escrita</li> <li>- Numéricas (binária, decimal, fracionária etc.)</li> <li>- Algébrica</li> <li>- Simbólicas (línguas formais)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gráficos cartesianos</li> <li>- Mudanças de sistemas de coordenadas</li> <li>- Interpolação, extrapolação.</li> </ul>

Fonte: Duval (2003) [grifos nossos].

De acordo com o Quadro 01, o trabalho com escala é possível nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir de uma mudança do registro multifuncional (o texto, em língua natural) em uma representação não-discursiva do tipo figura geométrica (uma reta numérica, uma figura geométrica de dimensão 1), perpassando os registros monofuncionais (pelo uso de números naturais).

Para Duval (2003), o desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão de enunciados e à aquisição de conceitos matemáticos se referem ao modo como trabalhar duas mudanças nos registros de representação semióticos: o tratamento e a conversão.

O autor considera que o tratamento é um tipo de transformação de uma representação semiótica em outra, porém, dentro de um mesmo registro. Desse modo, o tratamento é uma transformação estritamente interna a um registro, muito comum no desenvolvimento de temas da Matemática, como os que ocorrem durante a etapa de resolução de uma equação de 1º ou de 2º grau.

Duval (2003) propõe que a conversão é um tipo de transformação entre dois tipos registros de representação semióticos distintos, porém, conservam a referência ao mesmo objeto. Na conversão para o registro final, ocorre uma mudança parcial ou total do conteúdo do registro de representação inicial.

Duval (2012) aponta dois tipos de conversão: a congruente e a não-congruente. Na conversão congruente, a apresentação dos dados no registro terminal transparece no registro de partida, como se fosse uma recodificação. A conversão do tipo não-



congruente é aquela que favorece os aspectos de compreensão dos objetos matemáticos, pois, além da recodificação da mudança de registros, existe a mudança de forma e de conteúdos das representações semióticas envolvidas no processo.

A conversão não-congruente é uma operação que permite ampliar o repertório de compreensão. O autor defende que, do ponto de vista cognitivo, a compreensão permitida pela operação de conversão é guiada pelo modo em que ocorre o acesso aos objetos matemáticos.

## **4 Os referenciais e procedimentos metodológicos**

Este texto relata uma experiência desenvolvida em 2011, com nove alunos no 3º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública situada próxima a uma comunidade da cidade de São Paulo. O objetivo foi verificar se e em que medida é possível introduzir a noção de escala nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O desenvolvimento desta pesquisa foi resultado da aplicação de uma situação de aprendizagem, elaborada para viabilizar as manifestações escritas e verbais na mudança dos diversos registros de representação semiótica que podem estar associados à noção de escala.

A situação foi aplicada pela professora da classe em uma aula de 50 minutos. A professora havia, anteriormente, comunicado aos pais e alunos que haveria uma situação de pesquisa na qual não seriam identificados os nomes dos alunos e da escola. Em combinação com a professora, em horário inverso, discutimos anteriormente a questão epistemológica envolvendo a reta numérica, os registros de representação semióticos e os possíveis desdobramentos que as reflexões metacognitivas poderiam requerer. Também foram combinados os procedimentos na situação de aprendizagem que foi idealizada em conjunto com os referenciais teóricos.

Em conversa com a professora, esta revelou que os alunos haviam trabalhado poucas situações envolvendo a reta numérica, apresentadas no livro-texto adotado pela escola. Essas situações estavam envoltas em contextos diversos e cotidianos em que os dados numéricos já estavam expostos no registro gráfico da reta numérica, e cabia aos alunos responderem questões envolvendo a leitura e a operacionalização dos dados: adição ou subtração.

Porém, a professora havia optado, nessas situações, a fazer a leitura dos enunciados junto com os alunos, e trabalhado essencialmente com a operacionalização aritmética dos dados. Assim, não houve trabalho anterior a esta pesquisa com relação ao que representa a reta numérica e seus elementos e, em particular, à noção de escala.

Para possibilitar a análise dos registros de representações semióticos efetivados pelos alunos, entregamos uma ficha com o enunciado e com espaço para a resolução da atividade. As respostas dos alunos foram digitalizadas e apresentadas em forma de protocolos de pesquisa, para os registros escritos.

Para registrar as manifestações verbais dos alunos, foram feitas gravações de áudio. Para a condução da atividade e para a análise das verbalizações, foram consideradas as reflexões metacognitivas durante a pesquisa. Essa escolha recaiu na possibilidade de se perceber como os alunos realizam o processo da leitura dos dados numéricos presentes no enunciado e em como ocorre a reflexão, de preferência a mais autônoma possível, frente à etapa de tradução do texto matemático para os registros de representação semióticos próprios da reta numérica.

A metacognição, para Flavell (1981), indica um modo de percepção que um indivíduo tem sobre o próprio conhecimento, situada como o conjunto dos processos psicológicos mentais realizados pelo ato pensante, pela percepção, pela classificação e pelo reconhecimento.

Para Toledo (2003), a metacognição representa a capacidade de um indivíduo pensar sobre seu pensar, expressando como está estruturando o pensamento a respeito de um determinado conhecimento e, se necessário, reelaborando-o, de modo a refletir sobre o pensar, para conhecer ou para encontrar soluções frente a desafios.

É importante propiciar aos alunos, desde a mais tenra idade, situações que oportunizem aflorar o modo como a criança está pensando e como reorganiza as estratégias de solução frente aos desafios propostos em sala de aula.

As crianças podem revelar uma maneira genuína de pensar, ao expor o que compreendem, manifestando as elaborações de raciocínio que ocorreram pelos conflitos e por tentativas de soluções. A valorização do uso de estratégias metacognitivas faz da escola um lugar privilegiado para propor aos alunos situações de aprendizagem que os tornem capazes de enfrentar contextos diversos que permitam aflorar competências e conhecimentos.

#### **4.1 A atividade**

A atividade proposta e encaminhada está delineada no Quadro 2.

**Quadro 2: A atividade de aprendizagem proposta**


**SITUAÇÃO-PROBLEMA: Uma família**  
 Em uma família, o pai Téo tem cerca de quarenta e cinco anos, e a mãe Lia, quarenta anos. Nessa família, há dois filhos – Alex, de dez, Tom, de cinco anos – e a filha Juju, de quinze anos.

a) Organize o quadro em ordem crescente, indicando as pessoas e as respectivas idades citadas no texto:

PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE

b) Escreva os nomes e as idades na linha de tempo abaixo, em ordem crescente.  
**ATENÇÃO:** cada divisão da linha do tempo representa cinco anos.

nome \_\_\_\_\_

idade 

Fonte: Os autores.

Cada aluno recebeu uma folha contendo o enunciado da atividade (Quadro 2) e houve um momento de leitura coletiva da atividade, realizada pela professora do ciclo. Após a leitura, individualmente, tentaram responder as questões. Foi informado que, se houvesse alguma dúvida, perguntassem à professora.

**5 Resultados e reflexões**

Quanto ao item (a) da situação proposta, todos os alunos o responderam sem recorrer à professora. Cinco, dos nove alunos, responderam corretamente a questão. No Quadro 3, indicamos três das respostas corretas.

**Quadro 3: Protocolo indicando três das cinco respostas corretas do item (a):**

<table border="1"> <thead> <tr> <th>PESSOA DA FAMÍLIA</th> <th>IDADE</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Tom</td> <td>5 anos</td> </tr> <tr> <td>Alex</td> <td>10 anos</td> </tr> <tr> <td>Juju</td> <td>15 anos</td> </tr> <tr> <td>Lia</td> <td>40 anos</td> </tr> <tr> <td>Téo</td> <td>45 anos</td> </tr> </tbody> </table>	PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE	Tom	5 anos	Alex	10 anos	Juju	15 anos	Lia	40 anos	Téo	45 anos	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PESSOA DA FAMÍLIA</th> <th>IDADE</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>TOM</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Alex</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>JUJU</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>LIA</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>Téo</td> <td>45</td> </tr> </tbody> </table>	PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE	TOM	5	Alex	10	JUJU	15	LIA	40	Téo	45	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PESSOA DA FAMÍLIA</th> <th>IDADE</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Tom</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Alex</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Juju</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>Mae Lia</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>Pai Teo</td> <td>45</td> </tr> </tbody> </table>	PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE	Tom	5	Alex	10	Juju	15	Mae Lia	40	Pai Teo	45
PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE																																					
Tom	5 anos																																					
Alex	10 anos																																					
Juju	15 anos																																					
Lia	40 anos																																					
Téo	45 anos																																					
PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE																																					
TOM	5																																					
Alex	10																																					
JUJU	15																																					
LIA	40																																					
Téo	45																																					
PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE																																					
Tom	5																																					
Alex	10																																					
Juju	15																																					
Mae Lia	40																																					
Pai Teo	45																																					
Aluno A	Aluno B	Aluno G																																				

Fonte: Os autores.

Porém, quando os alunos vinham à mesa da professora para tirar dúvidas sobre o item (b), observamos que alguns deles não tinham colocado as respostas do item (a) na ordem crescente.

Então, conforme havíamos combinado anteriormente com a professora, para cada um dos quatro (4) alunos que erraram o item (a), foi explicado o termo ‘ordem

crecente'. A própria professora adicionou duas colunas à tabela dada e orientou para que os alunos reelaborassem a atividade, sem apagar o que já tinham feito, completando os resultados do item (a).

Vale destacar um registro de gravação de áudio da pesquisa, quando a professora questionou: “*Você leu o que está escrito aqui?*” (e a professora grifou para o aluno C a palavra ‘ordem crescente’). Ao que o aluno C respondeu: “*Ah! É mesmo!*”.

Os quatro alunos trouxeram a atividade. Foi observado que, dos quatro alunos, dois deles a refizeram corretamente, na ordem crescente. O Quadro 4 indica duas respostas refeitas corretamente.

**Quadro 4: Protocolo indicando duas resoluções refeitas corretamente**

PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE	PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE
Jão	40	Jão	5 anos
Sia	40	Clara	10 anos
Jão	5	Juana	15 anos
Clara	10	Sia	40 anos
Juana	15	Jão	45 anos

Aluno E

PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE	PESSOA DA FAMÍLIA	IDADE
Jão	45 anos	Jão	5
Sia	40 anos	Clara	10
Clara	10 anos	Juana	15
Jão	5 anos	Sia	40
Juana	15 anos	Jão	45

Aluno F

Fonte: Os autores.

Porém, dois alunos continuaram registrando os dados em uma ordem decrescente.

Sintetizamos as respostas do item (a) da situação-problema no Quadro 5.

**Quadro 5: Síntese das respostas da questão (a) da situação-problema ‘Uma família’.**

1ª Questão	Acertos (1ª tentativa)	Erros (1ª tentativa)	Acertos (2ª tentativa)	Erros (2ª tentativa)
1(a)	A; B; G; H; I	C; D; E; F	E; F	C; D (colocaram em ordem decrescente)
Total	5	4	7	2

Fonte: Os autores.

Um fato singular ocorreu com a aluna E. A aluna havia trazido a atividade por duas vezes e conversado com a professora. Observamos que a aluna tinha apagado o que havia escrito por algumas vezes, devido a visíveis marcas de borracha e riscos feitos a lápis. Numa terceira vez em que a aluna E procurou o auxílio da professora, perguntou: *É para escrever o nome da família da gente?* A professora explicou que era para responder a questão com base na história que tinha sido descrita no enunciado. Ao trazer novamente a questão, a aluna E a refez corretamente.

O aluno D procurou a professora e questionou sobre se era para responder daquela forma (mostrando a folha). A professora respondeu que o quadro estava preenchido, porém, interferiu, perguntando ao aluno se as respostas estavam de acordo com o que

estava escrito (e a professora grifou à caneta o termo ‘*ordem crescente*’). O aluno pensou um pouco a respeito e, após alguns instantes, fez uma observação: “*Ah! É só inverter aqui* (e mostrou os números ‘5’ e ‘15’)”.

Após esse momento, a professora solicitou que, sem apagar o que fez, o aluno D pensasse novamente na questão e completasse as duas colunas que a própria professora acrescentou ao lado do original, indicando a ordem crescente das idades. Na análise da produção, constatamos que o aluno D completou a coluna na ordem decrescente.

Quanto ao item (b) da situação-problema, houve várias dúvidas dos alunos.

Um aluno relatou que não estava conseguindo fazer. A professora perguntou-lhe se havia lido o que estava descrito em ‘*ATENÇÃO: cada divisão da linha do tempo representa cinco anos*’. O aluno disse que não havia lido essa observação.

Outra aluna disse que não havia entendido o enunciado. Uma terceira aluna queria saber onde registrava o nome e a idade das pessoas na reta. A professora orientou individualmente a aluna, especificamente sobre qual era o local para o registro.

Após essas interlocuções com os alunos, de modo individual, a professora releu coletivamente para os alunos o enunciado do item (b) da atividade 1 e procedeu com uma institucionalização local, para evitar um bloqueio na situação de aprendizagem proposta. Conforme os referenciais citados, era esperado que alunos da escolaridade básica tivessem dificuldades com relação à representação dos dados na reta numérica. Se consideramos alunos do início dos anos do Ensino Fundamental, a situação de aprendizagem tem justamente a função de introduzir uma noção, por meio da ação e reação, o que implica em meios de incentivá-los e de colocá-los em movimento de pensar sobre as dificuldades e sobre os entraves.

Na referida institucionalização, a professora desenhou a reta na lousa e também indicou as marcas, tal qual aparece no enunciado da folha impressa entregue aos alunos. Em seguida, orientou-lhes quanto à localização das idades, que seria em ordem crescente, e daí perguntou aos alunos qual era a idade inicial a ser marcada na reta. Alguns alunos responderam 5, 10 e 15 anos.

A seguir, a professora perguntou aos alunos se havia alguma relação entre uma idade e outra. Os alunos não souberam responder. Em seguida, frente a essa lacuna, a professora solicitou que observassem a reta e que respondessem o que havia entre uma marca e outra. Um aluno disse que havia um espaço. Frente a essa resposta, a professora questionou: “*Dentre as idades que foram citadas no enunciado da história, que numeração há, por exemplo, entre o 5 e o 10?*”. Vários alunos responderam que não havia número nenhum daqueles que foram dados na história.

Frente a esse entendimento inicial dos alunos pesquisados, a professora retomou a comando do enunciado da situação-problema - ‘*ATENÇÃO: cada divisão da linha do tempo representa cinco anos*’ - e questionou: “*O que significa a escrita na comando*

do enunciado no item (b) e qual a relação dessa comanda com o que conversamos até agora?”. Um dos alunos confirmou verbalmente o entendimento, expressando que, entre duas marcas da reta. “era de 5 em 5”.

A professora confirmou a resposta e novamente questionou: “Então, qual seria a próxima idade que poderia ser colocada no próximo risco do número 15?”. Os alunos responderam: “20”.

Após a institucionalização local, a professora solicitou que fizessem o item (b) da atividade. Observamos a fala de uma aluna: “Eu já tinha errado”. A professora solicitou que a aluna deixasse do mesmo jeito e que refizesse a resposta, desenhando a reta. A aluna explicou que ‘contaria de 5 em 5 até chegar na idade da mãe e do pai’.

**Quadro 6: Três protocolos de respostas da questão (b)**

	Aluno A
	Aluno D
	Aluno I

Fonte: Os autores.

A seguir, a professora convidou os alunos a repensarem e completarem a atividade. As respostas dos alunos estão expressas no quadro 7.

**Quadro 7: Síntese das respostas da questão (b) da situação-problema ‘Uma família’**

	Acertos	Erros
1(b) (RETA)	A; B; D; F; H; I	C: Erro na localização da mãe (Lia); porém, acertou a localização das outras pessoas e o uso da escala. E: Erro na localização de algumas pessoas; porém, entendeu o uso da escala. G: Escreveu a sequência em ordem crescente, porém não observou a ideia de escala.
Total	6	3

Fonte: Os autores.

O objetivo desta pesquisa foi verificar se e em que medida é possível introduzir a noção de escala, no âmbito dos números naturais, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tal, foi proposta uma situação de aprendizagem, com o fim de viabilizar a conversão entre a linguagem natural (o texto), a linguagem aritmética (a

operação de contagem) e o registro geométrico (a reta numérica), de modo a ampliar o repertório de compreensão, conforme o referencial de Duval (2003).

Duval (2003) coloca que, para se superar os obstáculos frente às aprendizagens, um possível modo é incentivar a operação de conversão, seja para favorecer a compreensão de enunciados, seja para a aquisição de conceitos matemáticos.

Na operação de conversão, ocorre uma transformação entre dois tipos registros de representação semióticos distintos, mas que conservam a referência ao mesmo objeto. Duval (2012) destaca um primeiro tipo de conversão, a congruente, cuja apresentação dos dados no registro terminal transparece no registro de partida, como se fosse uma recodificação.

No caso da presente pesquisa, a conversão congruente ocorreu no momento da retroação dos alunos frente aos dados numéricos presentes no enunciado da situação proposta para a organização dos dados na forma de tabela, em ordem crescente. Porém, alguns alunos apresentaram dificuldades nessa etapa. Pesquisas como a de Evangelista e Guimarães (2015) anteciparam que alguns alunos apresentariam dificuldades na organização de dados, seja em forma de tabela, seja como uma sequência numérica (rol de dados).

Com a intervenção da professora, que grifou à caneta o termo ‘ordem crescente’ na folha de atividade dos alunos com dificuldades e que solicitou que refletissem sobre a ação inicial, percebemos que a organização de dados na forma numérica pode evoluir, contornando as dificuldades apontadas nas pesquisas citadas. Essa ação permitiu aos alunos envolvidos na pesquisa uma compreensão inicial da forma própria e necessária da reta numérica: uma organização de dados sequencial e crescente.

Outro fator que pode ter contribuído para tal cenário foi o enunciado ambientado em um contexto familiar, que tinha como intenção iniciar o entendimento dos dados numéricos indicados no texto.

Outro momento que ocorreu na atividade desta pesquisa foi a conversão não-congruente. Na conversão do tipo não-congruente existe a mudança de forma e dos conteúdos das representações semióticas envolvidas no processo.

Essa intenção ocorreu na etapa de transformação dos dados da tabela para a reta numérica. Esta mudança de registro é uma conversão não-congruente, pois, para os alunos desta pesquisa, havia uma natural dificuldade em como efetivar a mudança dos registros de partida (o registro monofuncional da tabela, em ordem crescente) para o registro geométrico da reta numérica (não discursivo), o que se configurou em uma atividade cognitiva mais elaborada.

Em vista da dificuldade com este ‘novo registro de chegada’, foi apresentado no enunciado um comando para a interpretação do conceito de escala (‘cada divisão da linha do tempo representa cinco anos’). Com a esperada dificuldade com essa mudança de registro, relatada nas pesquisas de Friel, Curcio e Brigh (2001), Guimarães,

Gitirana e Roazzi (2001) e Guimarães (2002), dentre outros, houve a necessidade de interferência junto aos alunos.

A referida interferência permitiu ampliar o repertório de significados da operação de contagem entre quantidades inteiras envolvidas num contexto de leitura e de interpretação de um texto matemático, viabilizando um momento para introduzir a noção de escala no campo dos números naturais.

O ato da institucionalização, materializado pelo desenho realizado pela professora na lousa e pela indicação das marcas, ressaltando que estas foram feitas para representar idades de cinco em cinco anos, permitiu que os alunos refletissem sobre suas tentativas e ações iniciais, incentivando um novo pensar sobre a situação.

## 6 Conclusões

Usualmente, em situações de ensino, o professor prepara e expõe um assunto, apresenta exemplos e, posteriormente, solicita aos alunos exercícios de aplicação para a verificação da aquisição de certo conhecimento. Esse procedimento didático é conhecido como modelo herbatiano, devido a Johann Friederich Herbat, de meados do século XIX, sendo comum na sala de aula até os nossos dias.

Porém, é importante que sejam dadas oportunidades para que a ação dos alunos resulte em um movimento de construção de conhecimentos. Nesta pesquisa, não havia sido anteriormente explicada a noção de escala pela professora da série. Assim, foi organizada uma situação de aprendizagem na qual, aos alunos, caberia um papel de ação, para colocar em movimento os conhecimentos prévios e para repensar sobre suas ações e seus pensamentos.

Esse modo foi possível pela viabilização do processo metacognitivo, importante recurso para se trabalhar desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Essa postura metacognitiva foi possível de ser proposta, pois a organização de dados em uma tabela e a indicação dos dados na reta numérica são conceitos paramatemáticos, conforme expõem Chevallard, Bosch e Gascón (2001), que necessariamente não solicitam a apresentação de uma definição anterior pelo professor.

O ato de ação e de comunicação dos alunos, que puderam expor um repensar sobre os dados da tabela e efetivar novas tentativas para registro dos dados, reflete o pensamento de Jou e Sperb (2003). Os autores, da área de psicologia, destacam a importância de propiciar situações que favoreçam o desenvolvimento de uma postura metacognitiva desde a mais tenra idade.

O controle metacognitivo, na maioria das vezes, e, especialmente em crianças pequenas, acontece com pouca participação consciente. Entretanto, à medida que os processos cognitivos são mais exigidos por situações de vida mais complexas, os processos metacognitivos tornam-se mais conscientes (JOU; SPERB, 2006, p. 3).



As manifestações explícitas dos pensamentos pelo recurso metacognitivo permitiram aos alunos enfrentarem os usuais obstáculos didáticos e iniciarem um processo de compreensão das características essenciais da reta numérica: a ordem crescente e o conceito de escala, no âmbito dos números naturais.

Acreditamos que esta pesquisa pode contribuir para a superação de alguns obstáculos didáticos comuns em livros da escolaridade básica em que, usualmente, a reta numérica já é apresentada com os valores numéricos previamente denotados, com o espaçamento entre duas marcações consecutivas equivalendo a uma unidade, conforme expõe Albuquerque (2010).

A situação apresentada representou uma possibilidade de se trabalhar o bloco grandezas e medidas. Nesse sentido, os PCN situam que as atividades que envolvem esse trabalho “[...] proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e escala” (BRASIL, 1997, p. 24).

Usualmente, a escala se situa como uma noção paramatemática, aos moldes de Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o que permite focar o aspecto operatório da Matemática frente às outras áreas científicas. Em face disso, situamos que devam ser oferecidos diversos momentos para se trabalhar a noção de escala, pois, em aprendizagens futuras, a noção de escala será imprescindível para fenômenos das várias áreas do conhecimento.

Para se efetivar essa possibilidade, é igualmente importante que esse assunto possa, num futuro, ser considerado também a partir da perspectiva de noção matemática, o que disponibilizaria a noção de escala como um objeto de ensino no currículo de Matemática Elementar, em face de sua importância cultural e social (BODIN, 1989).

## Referências

ALBUQUERQUE, M. R. G. C. de A. *Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos*. 2010. 124f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

AURÉLIO. *Dicionário da Língua Portuguesa (Eletrônico)*. São Paulo: Nova Fronteira, 2003.

BODIN, A. Le échelles: preparation d’une situation d’enseignement en classe de cinquième. *IREM de Besançon: Collège d’Ornans*, Petit X, n. 20, p. 35-49, 1989.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática* (Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: Secretaria de Educação Fundamental/ MEC, 1997.

BRUNO, A.; ESPINEL, M. C. Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, VII, p. 57-85, 2005.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 5. ed. Portugal: Lisboa, 1970.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papyrus, 2003. p. 11-34.

DUVAL, R. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul./dez. 2012.

EVANGELISTA, B.; GUIMARÃES, G. Como os alunos do 5º ano compreendem o conceito de escala em gráfico? *Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 6, n.1, 2015.

FLAVEL, J. H. Cognitive Monitorin. In: DICKSON, W. P. (Org.). *Children's oral communication skills*. New York: Academic Press, 1981.

FRIEL, S.; CURCIO, F.; BRIGHT, G. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 32, n. 2, p. 124-158, 2001.

GUIMARÃES, G. L. *Interpretando e construindo gráficos de barras*. 2002. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

GUIMARÃES, G. L.; GITIRANA, V.; ROAZZI, A. Interpretando e construindo gráficos. REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., Caxambu, 2001.

HEEFFER, A. Historical objections against the number line. *Science&Education*, v. 20, n. 9, p. 863-880, 2011.

HENRY, M. *Didatique des Matématiques*. Besançon: Faculté des Sciences et de Techniques, 1991.

IGLIORI, S. B. C. A Noção de ‘Obstáculo Epistemológico’ e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Educação Matemática: uma introdução*. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 99-113.

JOU, G. I.; SPERB, T. M. Metacognition as regulatory strategy of learning. *Psicol. Reflex. Crit.*, Porto Alegre, v. 19, n. 2, 2006. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0102-79722006000200003&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-79722006000200003&lng=en&nrm=iso)>. Acesso em: 14 out. 2013.

LEMOS, M. P.; GITIRANA, V. Professorandos analisando atividades de interpretação de gráficos de barras. 2002. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 8.. *Anais...* Recife, 2004.

LIMA, I. B. *Investigando o desempenho de jovens e adultos na construção e interpretação de gráficos*. 2010. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

MELO, M. S. L.; BELLEMAIN, P. M. B. Ensino e a aprendizagem do conceito de escala, no quarto ciclo do Ensino Fundamental, à luz da teoria dos campos conceituais. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 8. *Anais...* Recife, 2004.

SILVA, D. B. *Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental*. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

SILVA, M. B. E. *Apresentando a representar escalas em gráficos: um estudo de intervenção*. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, CE, Recife, 2014.

SPINILLO, A. G. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. Recife: Universitária da UFPE, 1997.

TOLEDO, M. E. R. O. *As estratégias metacognitivas de pensamento e o registro matemático de adultos pouco escolarizados*. 2003. 228f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

VIEIRA, M. S. L. M; BELLEMAIN, P. M. B. Análise da produção dos alunos da 1ª série do Ensino Médio nas resoluções de problemas relativos à escala e conceitos afins, à luz da teoria dos campos conceituais. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ENEM, 9., 2007. *Anais ...* Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Comunicacao\\_Cientifica/Trabalhos/CC47377429453T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC47377429453T.doc)>. Acesso em: 12 abr. 2014.

Recebido em: 21/07/2016

Aprovado em: 02/04/2018