

# DESENVOLVIMENTO DE SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM PROBLEMA DE CALOR UNIDIMENSIONAL USANDO FUNÇÕES DE GREEN

## DEVELOPMENT OF A ONE DIMENSIONAL HEAT CONDUCTION MODEL USING GREEN'S FUNCTIONS

GABRIEL ANDRADE MARQUES; GABRIELA COSTA DE OLIVEIRA;  
SIDNEY RIBEIRO DA SILVEIRA

### RESUMO

Este trabalho dedica-se à obtenção de solução analítica em condução de calor por meio de Funções de Green (FG), decorrente de um problema térmico unidimensional transiente. Indica-se o uso do método de FG uma vez que as condições de contorno variam com o tempo, o que descarta de imediato o método de separação de variáveis. Uma vez identificado a FG, a solução da equação torna-se um simples problema de integração matemática de cada termo envolvido. Assim, caso a integral não possa ser resolvida analiticamente, o uso de métodos numéricos de integração pode ser aplicado sem perdas que comprometam a exatidão do problema. A grande força do uso das FG está na possibilidade de obtenção de soluções de problemas de condução de calor dos tipos mais variados e complexos, como por exemplo, problemas tridimensionais transientes, com termos de geração de calor transientes e não uniformes e que possam ainda estar sujeitos as condições de contorno não homogêneas variando com o tempo e o espaço. Apresenta-se neste trabalho de uma forma simples e didática a solução analítica de um problema unidimensional em condução de calor.

**Palavras-chave:** Solução Analítica. Microprocessador. Transferência de Calor. Método Analítico.

### ABSTRACT

*This work propose to obtain the analytical solution of heat conduction equation using Green's functions (GF), from an unidimensional transient thermal problem. Suggest to use GF method due the boundary conditions varying with the time, which immediately discards the separable variables method usage. Once GF are identified, the partial differential equation became a simple mathematical integration problem of each term involved. Thus, if the integral cannot solved analytically, the use of numerical integration methods can be used without lose the problem accuracy. The great strong of GF usage is at possibility to obtain solution of varied and complex heat conduction problems, for example, three dimensional transient heat problems with an non uniform transient heat generation terms and that can be non*

*homogeneous varying with the time and space. This work presents, in a simple and didactic way, the one dimensional heat conduction problem analytical solution.*

**Keywords:** *Analytical solution, microprocessor, Heat conduction, analytical method.*

## INTRODUÇÃO

A muito que a história da humanidade pode ser contada através de suas descobertas científicas, por exemplo, a invenção da roda, o uso da energia, a revolução industrial ou a chegada do homem à lua em naves tripuladas. Cada época poderia, então, ser identificada por alguma característica importante de nossa evolução. Uma característica marcante dos tempos atuais pode ser sem dúvida, o uso de computadores ou as grandes simulações numéricas que nos permite construir as diversas realidades virtuais a que nos acostumamos de forma bem natural.

Difícilmente nos imaginamos hoje sem um computador e todo o tipo de aparato eletroeletrônico. Assim como todos esses aparatos, o processador produz calor quando está em execução. O calor é um parâmetro que tem forte influência no desempenho do processador durante este processo, assim, o aquecimento do dispositivo eletrônico precisa ser removido o mais rápido possível, caso contrário, a sua temperatura interna irá aumentar e conseqüentemente, se o aparelho ficar muito quente, internamente, seus circuitos podem ser danificados.

Especificamente, no ramo da engenharia dentre os fenômenos existentes, estuda-se a transferência de calor por condução que se dá devido ao gradiente de temperatura em meio sólido e que pode ser modelado matematicamente pela equação da difusão. A solução da equação da difusão de calor nos permite analisar o comportamento térmico de várias situações que descrevem fenômenos físicos importantes e presentes com aplicações em engenharia (OLIVEIRA, 2015).

Uma das ideias do presente trabalho consiste em analisar o comportamento térmico de um processador. Um modelo simplificado que pode ser usado para essa análise se dá por um problema térmico unidimensional (1D) em condução de calor, submetido a um fluxo de calor em sua extremidade inicial ( $x = 0$ ) e isolamento térmico na superfície oposta ( $x = L$ ). Vários métodos podem ser usados para obtenção da equação-solução, dentre eles indica-se o método FG.

As funções de Green foram nomeadas assim após o físico inglês George Green (1793 - 1841) desenvolver poderosas ferramentas para a obtenção de uma solução linear da condução de calor. Além disso, elas também se aplicam para a obtenção de muitos outros fenômenos descritos pelas equações diferenciais lineares.

## DESENVOLVIMENTO

Apresenta-se uma breve revisão de trabalhos encontrados na literatura que abordam modelos e soluções de problemas térmicos que descrevem o fluxo de calor de componentes eletrônicos. Pedrazzani e Galande (2009) trataram sobre o limite físico na fabricação de transistores em camadas de silício mais fina, isso faz com que se tenha um aumento na busca por novas tecnologias para a fabricação de circuitos integrados e microprocessadores, para isso são utilizadas duas etapas: Montagem do sistema de equações, que se dá através do método de diferenças finitas. Para a resolução do sistema de equações usou-se o método numérico do Gradiente Conjugado (GC). Foi usado esse método pelo fato das operações que o formam serem de caráter vetorial e matricial, a estratégia adotada nas implementações da solução foi a decomposição por dados, que permitiu segmentar uma estrutura de dados em diversos blocos e distribuí-la entre as unidades de execução, para serem processadas simultaneamente.

No trabalho de Gonçalves *et al.* (2010) foram feitos testes para demonstrar a eficiência de funcionamento em duas condições sendo a primeira trabalhando com a capacidade máxima da carga de processamento do computador e a segunda operando em vazio, ou seja, apenas com o sistema operacional. O dissipador foi admitido como sendo uma placa plana de espessura finita com uma das suas superfícies submetida a uma fonte de calor uniforme dissipada pelo microprocessador, enquanto a outra é submetida a uma transferência de calor por convecção forçada. Os resultados experimentais demonstraram que não houve influência na eficiência com o aumento de temperatura.

Choi *et al.* (2012) propuseram um novo refrigerador de unidade de processamento central (CPU), uma vez que o arrefecimento ativo deve ser otimizado sobre a limitação total de volume, custo e nível de ruídos. A união de aletas do refrigerador e uma combinação de tubos de condução foram utilizadas de forma

comercial, entretanto, não conseguem manter o computador operando abaixo dos 70°C em condições de baixa produção de ruídos. Assim, com base em diversos testes, obtiveram uma forma mais eficiente para remoção do calor que ocorre através do modelo produzido por eles, contudo observou-se que o modelo obtido é de difícil aplicação para uma mudança rápida e de baixo custo, devido ao complexo processo de produção, porém demonstraram que é necessária a produção de um novo modelo de ventoinha da CPU para aumentar a performance em baixa velocidade e que tenha uma produção mais simples e mais barata.

Foi desenvolvido por Nazaria *et al.* (2014) uma comparação entre novas formas para aumentar a eficiência na transferência de calor nos componentes de um computador através de um sistema líquido de resfriamento, sendo usado atualmente a água como produto base nesse conjunto tem-se também a adição de nano partículas para aumentar o coeficiente de transferência de calor. Depois de diversos testes foi comprovado que o etileno glicol é mais eficiente que a água e outros líquidos testados, como fluido base dentro de um circuito de arrefecimento, foi comprovado também que com o aumento do fluxo de ar há uma redução na temperatura, contudo há também um maior consumo de energia. Além disso, adicionar mais nanopartículas no fluido base aumenta o custo e a instabilidade.

Baseado em diversos modelos matemáticos, os resultados obtidos em alguns desses testes foram possíveis devido ao uso das FG que tiveram como principal objetivo auxiliar na obtenção de uma solução linear em condução do calor. Além disso, elas também se aplicam para a obtenção de muitos outros fenômenos descritos pelas equações diferenciais lineares, como modelos uni, bi e tridimensionais, como exemplo coordenadas cilíndricas e esféricas, contudo, nesse trabalho será discutido apenas um modelo uni dimensional em coordenadas retangulares.

## ANÁLISE

Como o número de problemas em condução de calor é grande devido as várias combinações das condições de contorno, Cole et al. (2010) propuseram um sistema de numeração com o intuito de facilitar a notação no uso das FG nos vários problemas. A equação da difusão em coordenadas cartesianas pode ser escrita como:

$$\frac{(\partial^2 T)}{(\partial x^2)} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g(x,y,z,t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

onde  $x, y$  e  $z$  representam respectivamente as direções cartesianas. A equação 1 pode estar sujeita a cinco condições de contorno distintas:

O primeiro tipo de condição é definida como temperatura prescrita sobre o contorno  $i$ ,

$$T(r_i, t) = f_i(r_i, t) \quad (2)$$

O segundo tipo de condição de contorno, como fluxo de calor:

$$k \frac{\partial T}{\partial n_i} |_{r_i} = f_i(r_i, t) \quad (3)$$

onde  $n_i$  é o vetor normal ao contorno.

Por exemplo: para o caso unidimensional em  $x_1 = 0$  e  $x_2 = L$  as condições de contorno de segundo tipo serão dadas por:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = f_1(t) \quad (4)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=L} = f_2(t) \quad (5)$$

sendo  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  os fluxos de calor voltados para a superfície.

O terceiro tipo é a condição de contorno convectiva:

$$k \frac{\partial T}{\partial n_i} |_{r_i} + h_i T |_0 = f_i(r_i, t) \quad (6)$$

aonde  $h_i$  é o coeficiente de transferência do calor e  $f_i(r_i, t)$  é usualmente igual a  $h_i T_\infty$  com  $T_\infty$  sendo a temperatura ambiente, mas  $f_i(r_i, t)$  pode também incluir o fluxo de calor prescrito.

O quarto tipo é para uma película fina sobre a superfície com um fluxo de calor estabelecido:

$$k \frac{\partial T}{\partial n_i} |_{r_i} = f_i(r_i, t) - (\rho cb)_i \frac{\partial T}{\partial t} |_{r_i} \quad (7)$$

O quinto tipo de condição de contorno é uma película fina que permite a troca de calor através da convecção:

$$k \frac{\partial T}{\partial n_i} |_{r_i} + h_i T |_{r_i} = f_i(r_i, t) - (\rho cb)_i \frac{\partial T}{\partial t} |_{r_i} \quad (8)$$

A condição de contorno do quinto tipo é fisicamente idêntica com a do quarto exceto que, ao invés de um fluxo de calor específico na superfície da película fina se tem um coeficiente  $h$  específico da transferência de calor.

Outro caso importante é o do tipo zero. Isso se aplica para condições em que não há um contorno físico, e é algumas vezes chamado de condição de contorno

natural. Ela inclui diversos casos, um deles é o de coordenadas retangulares, aonde o contorno se entende para o infinito.

A tabela 1 apresenta as diferentes combinações possíveis com as condições de contorno.

**Tabela 1:** Tipos de condições de contorno

| Notação | Nome da condição de contorno | Descrição da condição de contorno |
|---------|------------------------------|-----------------------------------|
| 0       | Tipo zero                    | Sem efeito físico de contorno     |
| 1       | Dirichlet                    | Temperatura prescrita             |
| 2       | Neumann                      | Fluxo de calor prescrita          |
| 3       | Robin                        | Convecção                         |
| 4       | Quarto tipo                  | Espessura fina, sem convecção     |
| 5       | Quinto tipo                  | Espessura fina, com convecção     |

Por exemplo, a função de Green unidimensional sujeita a condição de contorno de fluxo prescrita em uma das extremidades  $x = 0$  e condição de convecção do lado oposto é representada por X23. Para problemas multidimensionais a simbologia é dada pelo produto de problemas unidimensionais, por exemplo: XabYcdZef onde abcdef podem assumir qualquer tipo de contorno listado na tabela 1.

O problema térmico 1D em condução de calor definido por uma placa submetida a um fluxo de calor,  $q(t)$  em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico à superfície oposta,  $x = L$ , é referenciado como X22 por Cole *et al.* (2010). Trata-se, neste caso, de um dos problemas clássicos em condução de calor que tem aplicação em obtenção de propriedades termo físicas.

Descreve-se matematicamente, o problema representado pela Figura 1 pela equação de difusão de calor:

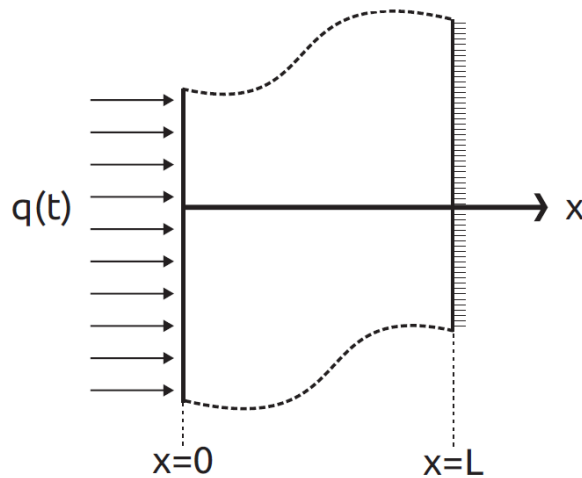
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

Sujeita às condições de contorno:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t); \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (10)$$

e à condição inicial:

$$T(x, 0) = F(x) = T_0 \quad (11)$$



**Figura 1:** Esquema de um problema térmico definido por um placa plana submetida a um fluxo de calor em  $x = 0$ , e condição de isolamento térmico à superfície oposta,  $x = L$ .

A equação-solução integral baseada em funções de Green do problema unidimensional é dada por:

$$T(x, t) = \int_0^L G(x, t|x', 0)F(x')dx' + \alpha \int_0^t \int_0^L G(x, t|x', \tau) \frac{g(x', \tau)}{k} dx' d\tau \quad (12)$$

$$+ \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{f_1(\tau)}{k} d\tau + \alpha \int_0^t G(x, t|L, \tau) \frac{f_2(\tau)}{k} d\tau$$

O primeiro termo da solução integral na equação 12 é referente à temperatura inicial  $F(x) = T_0$ , o segundo termo diz respeito a geração de calor  $g(x, t)$  e os dois últimos termos descrevem condições de contorno do segundo tipo, isto é, em  $x = 0$  tem-se  $f_1(t) = q(t)$  e para  $x = L$  tem-se  $f_2(t) = 0$ .  $G(x, t|x', \tau)$  representa a função de Green,  $\alpha$  e  $k$  são difusividade e condutividade térmica, respectivamente (Cole et al., 2010).

Assim, resumindo as características particulares do problema descritas nas Eqs. (9 - 11), tem-se que:

$$F(x) = T_0; \quad g(x, t) = 0; \quad f_1(t) = q(t); \quad e \quad f_2(t) = 0 \quad (13)$$

e substituindo 13 em 12 obtém-se:

$$T(x, t) = T_0 + \alpha \int_0^t G(x, t|0, \tau) \frac{q(\tau)}{k} d\tau \quad (14)$$

Observa-se na equação 14 que  $G(x, t|x', \tau)$  é a função de Green referente ao problema X22, dada por (Cole et al., 2010) como:

$$G_{X22}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \right] \quad (15)$$

Logo, quando  $x' = 0$

$$G_{X22}(x, t|0, \tau) = G(x, t|0, \tau) = \frac{1}{L} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (16)$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_0 + \frac{\alpha q}{k} \int_0^t G(x, t|0, \tau) d\tau \\ &= T_0 + \frac{\alpha q}{k} \int_0^t \left[ \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

Avaliando-se a integral temporal na equação 17 obtém-se,

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha q}{k} \left[ \frac{t}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^t e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} d\tau \right] \quad (18)$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_0 + \frac{\alpha q}{k} \left[ \frac{t}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^t e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 (\alpha t - \alpha \tau)} d\tau \right] \\ &= T_0 + \frac{\alpha q}{k} \left[ \frac{t}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^t e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha \tau} d\tau \right] \\ &= T_0 + \frac{\alpha q}{k} \left[ \frac{t}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \int_0^t e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} e^{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha \tau} d\tau \right] \\ &= T_0 + \frac{\alpha q}{k} \left[ \frac{t}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \int_0^t e^{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha \tau} d\tau \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Resta-se, portanto, o cálculo da integral temporal, assim, seja  $\frac{m\pi}{L} = \beta_m$ , onde  $m = 1, 2, 3, \dots$  logo:

$$\int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} e^{\beta_m^2 \alpha \tau} d\tau = \frac{e^{\beta_m^2 \alpha \tau}}{\alpha \beta_m^2} \Big|_0^t = \frac{e^{\beta_m^2 \alpha t}}{\alpha \beta_m^2} - \frac{1}{\alpha \beta_m^2} = \frac{e^{\beta_m^2 \alpha t} - 1}{\alpha \beta_m^2} \quad (20)$$



Assim, substituindo a integral temporal obtida pela equação 20 na equação 19, obtém-se a equação geral dada por:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q\alpha}{kL}t + \frac{q}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} - \frac{q}{kL} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha t}}{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \quad (21)$$

A solução dada pela equação 21 pode ser representada graficamente, e assim é possível analisar o comportamento térmico de um processador.

### ANÁLISE GRÁFICA DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Como mencionado, a solução analítica desenvolvida nos permite um entendimento físico do problema proposto, para isso, usando o *software* Matlab implementa-se a equação 21 usando as seguintes características geométricas, térmicas, temporal, fluxo de calor e condição inicial:

- Condutividade térmica:  $k = 148 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
- Difusividade térmica:  $\alpha = 89,2 \times 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$
- Temperatura Inicial:  $T_0 = 20^\circ\text{C}$
- Tempo total:  $t = 60\text{s}$
- Fluxo de calor:  $q = 140 \text{ W}$
- Comprimento:  $L = 0,04 \text{ m}$

A figura 1 apresenta as temperaturas calculadas usando a equação 21 para as posições  $x = 0$ ,  $x = L/2$  e  $x = L$ , que representam respectivamente a base, meio e topo do processador no sentido do eixo  $x$ . Pode-se observar a variação térmica a medida que ocorre o avanço de tempo, este fato simula um processador em “repouso” a uma temperatura inicial que passa a executar rotinas causando aumento de sua temperatura. Observa-se também o tempo gasto para que aja variação térmica para as referidas posições.

A variação térmica apresentada é efeito de uma simulação com características hipotéticas, a fim de apresentar a aplicação do modelo térmico desenvolvido neste trabalho, neste sentido, podem-se variar todas as condições usadas nesta simulação para obter-se diferentes perfis térmicos.

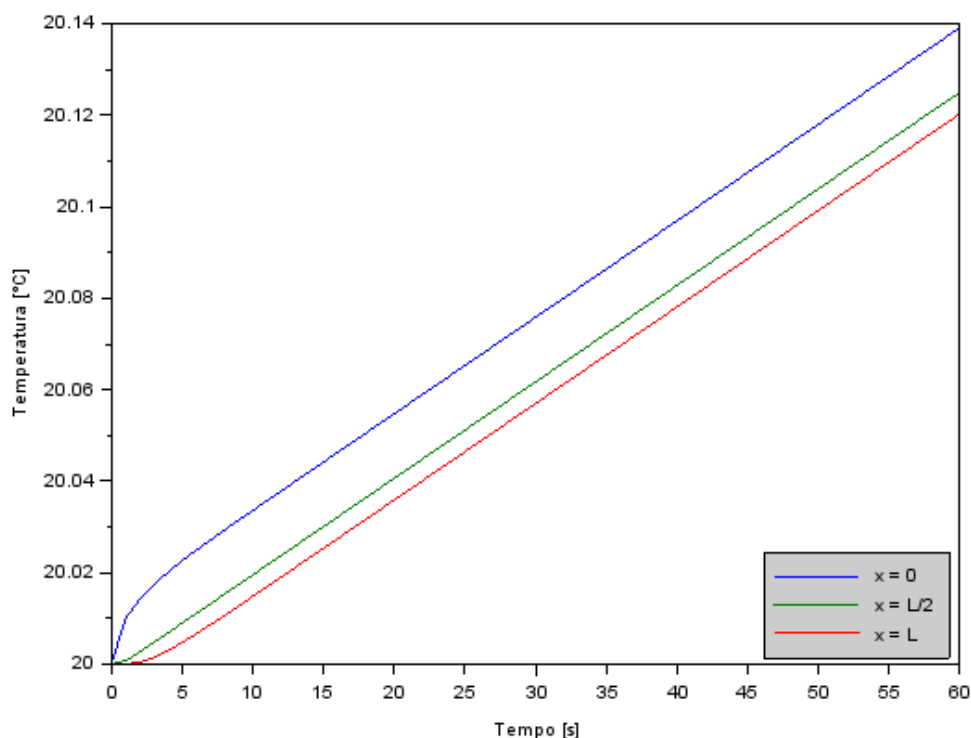


Figura 1. Temperaturas geradas pela equação 21 levando em consideração geometria e propriedades térmicas hipotéticas.

## CONCLUSÃO

Pode-se concluir, observando a equação 21, a possibilidade de obtenção da solução analítica em condução de calor unidimensional para análise térmica de processadores. Observou-se também, que a solução analítica nos permite um entendimento físico do problema proposto, onde é possível simular a solução, equação 21, para qualquer condição geométrica, de material, temporal ou fluxo de calor.

Observa-se também, que a solução analítica apresentada é de fácil entendimento, implementação e de baixo custo computacional em sua execução, fazendo assim, uma ferramenta prática e robusta para análises térmicas em qualquer contexto.

**REFERÊNCIAS**

- [1] CHOI, J.; JEONG, M.; YOO, J.; SEO, M., A new CPU cooler design based on an active cooling heatsink combined with heat pipes. **Elsevier**, 2012.
- [2] COLE, K. D.; BECK, J. V.; LITKOUHI, B., **Heat Conduction Using Green's Functions**. 2 ed. Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences, 2011.
- [3] GONÇALVES, R. S.; SOUSA, E.; MORAES, D. H.; MARTINS, K. R. S. B.; SANTANA, A. P., Análise do desempenho do dissipador de calor utilizado em processadores. **VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, 2010.
- [4] NAZARIA, M.; KARAMIB, M.; ASHOURI, M., Experimental Thermal and Fluid Science Comparing the thermal performance of water, Ethylene Glycol, Alumina and CNT nanofluids in CPU cooling: Experimental study. **Elsevier**, 2014.
- [5] OLIVEIRA, G. C. **Solução Analítica em Condução de Calor Multicamada: Aplicação em Ferramentas Revestidas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Uberlândia, 2015.
- [6] PEDRAZZANI, A. M.; GALANTE, G. Solução do Problema de Difusão de Calor em Processadores Multicore. **VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, 2009.

**AUTORES:**

**Gabriel Andrade Marques.** Graduando em Engenharia da Computação pela Universidade do Estado de Minas Gerais Unidade Ituiutaba.

**Gabriela Costa de Oliveira.** Graduação em Matemática (2011), Mestrado (2015) e Doutorado (2019) em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Docente da Universidade do Estado de Minas Gerais, Unidade Ituiutaba. E-mail: gabriela.oliveira@uemg.br

**Sidney Ribeiro da Silveira.** Graduação em Matemática, Mestrado e Doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Docente da Universidade do Estado de Minas Gerais, Unidade Ituiutaba. E-mail: sidney.silveira@uemg.br