

O modelo probabilístico Gumbel no ajustamento da vazão máxima do córrego Norete

The Gumbel probabilistic model in the Norete stream maximum flow adjustment

Araújo, G.A¹; Pinheiro, V.R²; Silveira K.C; Simitan P.L³

¹Universidade do Estado de Minas Gerais, João Monlevade, MG, Brasil.

gracielle.araujo@uemg.br

RESUMO

O ciclo hidrológico alterou-se devido à degradação ambiental, comprometendo a vazão dos rios e, em particular, do Ribeirão Norete, o que afetou a produção agrícola nas propriedades rurais locais. Além disso, a falta de investimentos, de cultura e de políticas de conscientização ambiental resultou em um comportamento descontínuo do ciclo hidrológico. Assim, este trabalho é motivado pela necessidade de modelação da vazão do ribeirão Norete, a partir de um modelo probabilístico, que pode ser utilizado como ferramenta robusta de controle para aplicação em projetos de recuperação ambiental do Norete. Para o estudo, mensurou-se a vazão nas semanas em que houve precipitação e, a partir de uma análise estatística dos dados para o estudo e modelação da vazão máxima, observou-se sazonalidade acentuada, o que gerou o ajuste a um modelo de extremos. Concluiu-se que os dados seguem uma distribuição de probabilidade Gumbel de máximos, com parâmetros estimados pela máxima verossimilhança, obtidos com aplicação de métodos numéricos.

Palavras-chave: Distribuição de gumbel, Modelo probabilístico, Degradação ambiental.

ABSTRACT

The hydrological cycle has changed due to environmental degradation, affecting the flow of rivers and, in particular, of Ribeirão Norete, which affected agricultural production in local rural properties. In addition, the lack of investments, culture and environmental awareness policies has resulted in discontinuous hydrological cycle behavior. Thus, this work is motivated by the need for modeling the flow of the Norete stream, from a probabilistic model, which can be used as a robust control tool for application in Norete environmental recovery projects. For the study, the flow was measured in the weeks when there was precipitation and from a statistical analysis of the data for the study and modeling of the maximum flow, there was accentuated seasonality, which led to the adjustment to an extreme model. It was concluded that the data follow a distribution of maximum Gumbel probability, with parameters estimated by maximum likelihood, obtained by applying numerical methods.

Keywords: Gumbel distribution, Probabilistic model, Environmental degradation.

1. INTRODUÇÃO

A bacia hidrográfica do Rio Doce, caracterizada pelas suas planícies fluviais, é alimentada por um conjunto de afluentes. Um destes, o ribeirão Norete, localizado no município de Franciscópolis, possui muitos pontos de afloramento de água, abastecendo a agricultura familiar e a pecuária, atividades predominantes na região.

Segundo Baptista (2010) os cursos d'água apresentam naturalmente variações sazonais de vazões, estando também frequentemente sujeitos a interferências antrópicas em suas bacias hidrográficas, com reflexos hidrológicos e climáticos. Assim, o controle da vazão do ribeirão, resultado do volume de água pelo tempo, associado a uma previsão fiável para tomada de qualquer decisão acerca da utilização sustentável da água, é essencial para o desenvolvimento da região do distrito abastecida pelo Norete.

Nos anos de 2015 e 2016, a região passou por uma estiagem prolongada devido às mudanças climáticas, diminuindo abruptamente a vazão. No final do mês de agosto de 2016, o ribeirão secou, evidenciando a falta de precipitação.

O Ribeirão Norete não possui água durante todo o ano e, por isso, faz-se necessário um estudo sobre o controle de sua vazão como auxílio na tomada de decisão de medidas de mitigação em épocas de seca. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é a modelação da vazão máxima do ribeirão Norete do ano de 2016, a partir do ajustamento a um modelo probabilístico que pode ser utilizado como ferramenta de controle e previsão.

Em uma sociedade globalizada e consumista, o uso consciente de água torna-se essencial. Em particular, as práticas na agricultura devem ser de forma intensiva, com alta produtividade e responsabilidade no que tange à utilização dos recursos naturais. Assim é imprescindível a adoção da tecnologia que otimiza o uso da água, tornando possível o aumento de produção, padronização e qualidade dos produtos, principalmente em períodos fora de época, quando os preços pagos ao produtor são maiores, a fim de se encontrar novas soluções que sejam aplicáveis na diminuição dos problemas relacionados à escassez de água. (Hernandez, et al, 2003).

O comportamento sazonal da vazão do ribeirão prejudica o fornecimento de água para a produção agrícola. Dentro deste cenário, este trabalho buscou o ajustamento de um modelo probabilístico de extremo, chegando-se à conclusão de que a distribuição de probabilidade

Gumbel descreve o comportamento desses dados; o que, em conjunto com práticas ambientais, pode ser uma ferramenta de auxílio nos projetos de recuperação do Ribeirão e, conseqüentemente, para a produção agrícola local.

2. METODOLOGIA

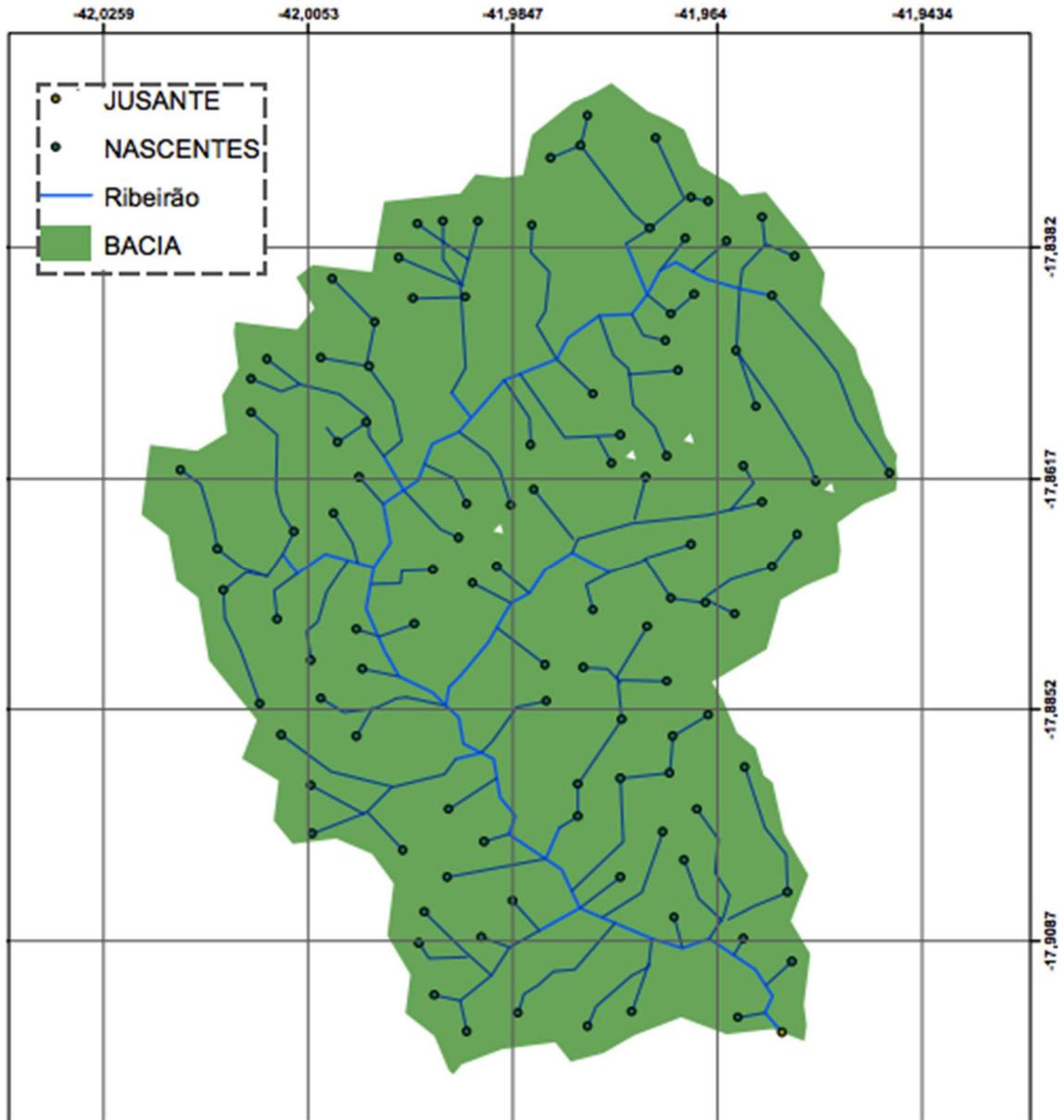
A bacia do Rio Doce possui área de captação pluvial de 60 km², com perímetro de 35.132 metros. É abastecida por 86 pontos de drenagem, alguns vegetados e outros degradados. Segundo o levantamento feito por sensoriamento remoto, as áreas de pastagem respondem por 61,70% da área total da bacia, enquanto a parte com vegetação nativa representa 37,2%. O curso do ribeirão Norete até o exutório é de 13800 metros, sendo a altitude máxima de 689 metros e o valor no exutório de 352 metros, obtendo assim uma declividade média de 2,4%. A rentabilidade da propriedade é ampla e proporciona um trabalho de qualidade, mas a escassez de água tem se agravado, o que gera preocupação para com o comprometimento de qualidade e de quantidade da água, justificando a necessidade desse controle de vazão.

Para o estudo do comportamento vazão do Norete, o processo foi o segmento na análise dos dados; que envolve a coleta, a análise empírica, e o ajustamento deles a um modelo probabilístico.

No processo para o levantamento das medidas de vazão e precipitação ocorrida na bacia, aplicou-se a instalação de pluviômetros em pontos escolhidos e com alternância de forma aleatória. Para monitoramento, utilizaram-se aparelhos destinados à medição da velocidade do fluxo de massa do rio e o tubo de pitot. Ressalta-se o período analisado: entre 22 de janeiro e 25 de agosto de 2016, data em que o ribeirão Norete secou.

A região abrangida na pesquisa é apresentada na figura 1, através do mapa do sistema de coordenadas geográficas WGS84, onde consta a bacia, o ribeirão, a nascente e a jusante. Na observação do comportamento empírico dos dados, essencialmente importante para uma análise mais detalhada da vazão, pôde-se detectar informações importantes que extrapolam o escopo do estudo e que serão utilizadas para estudo da previsão e da conseqüente tomada de decisão com maior eficiência e controle de vazões do Norete.

Figura 1 – Sistema de Coordenadas Geográficas WGS 84



Fonte: Elaboração própria.

Após a coleta e a organização da informação, realizou-se uma análise estatística descritiva, objetivando a orientação para a descrição do comportamento da vazão a partir de um modelo robusto. Em seguida aplicou-se o ajustamento, no qual a distribuição de probabilidade que apresentou o melhor resultado para os dados foi o modelo probabilístico Gumbel.

Seendo $Y \equiv \Lambda(y; \alpha, \beta)$, Gumbel com parâmetros α e β , a sua função de distribuição é dada por:

$$F(y) = \exp \left\{ -\exp \left\{ -\frac{(y - \alpha)}{\beta} \right\} \right\}, \quad -\infty < y < \infty, \quad \alpha \in R, \quad \beta > 0$$

com a função densidade de probabilidade,

$$f(y) = \frac{1}{\beta} \exp \left\{ -\frac{(y - \alpha)}{\beta} \right\} \exp \left\{ -\exp \left\{ -\frac{(y - \alpha)}{\beta} \right\} \right\}, \quad -\infty < y < \infty, \quad \alpha \in R, \quad \beta > 0$$

A teoria do valor extremo é amplamente aplicada na modelagem matemática de dados de grande variabilidade e, devido à degradação ambiental, os fenômenos extremos da natureza têm sido mais comuns e intensos.

Para a estimação dos parâmetros α e β , foi aplicado o método da verossimilhança, escolhido por apresentar a melhor adequação para distribuição Gumbel. A função verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta | y_1, \dots, y_n) &= \prod_{i=1}^n f(\alpha, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \exp \left\{ -\exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\beta} \right)^n \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \left[\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} + \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

Tem-se que $L(\alpha, \beta | y_1, \dots, y_n)$ é diferenciável relativamente α e β . Considerando $l = \log \log L(\alpha, \beta | y_1, \dots, y_n)$ segue-se,

$$l = \ln \ln (L) - n \ln(\beta) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} + \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \right]$$

A primeira derivada em função de α e β são respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha} &= -\sum_{i=1}^n \left[\frac{-1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \right] \\ &= \frac{n}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} &= -\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \left[-\frac{(y_i - \alpha)}{\beta^2} + \frac{(y_i - \alpha)}{\beta^2} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \right] \\ &= -\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \alpha)}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \alpha)}{\beta^2} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \end{aligned}$$

E a segunda derivada em função em relação a α e β são respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \\ &= -\frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial^2 \beta} &= \frac{n}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha) + \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha) \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \alpha)(y_i - \alpha)}{\beta^2} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \\ &= \frac{n}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha) + \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha) \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\beta^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^2 \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \end{aligned}$$

com as derivadas parciais dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha} \\ &= -\frac{n}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2 b} \sum_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \alpha)}{\beta^2} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \\ &= -\frac{n}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2 b} \sum_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} - \frac{1}{\beta^3} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha) \exp \left\{ -\frac{(y_i - \alpha)}{\beta} \right\} \end{aligned}$$

Considerando,

$$f = \left[\frac{\partial l}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial l}{\partial \beta} \right] e H = \left[\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \right]$$

assim,

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \beta^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \beta^{(i)} \end{bmatrix} - H^{-1}(\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}) f(\alpha^{(i)}, \beta^{(i)})$$

Sendo o método de paragem,

$$\left[\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \beta^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \beta^{(i)} \end{bmatrix} \right]^T \left[\begin{bmatrix} \alpha^{(i+1)} \\ \beta^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^{(i)} \\ \beta^{(i)} \end{bmatrix} \right] \leq k$$

O método da máxima verossimilhança produz parâmetros com menor variância, calculando o valor ótimo, para cada um, adequado a distribuição Gumbel.

Para validação do modelo, aplicou-se o teste qui-quadrado (χ^2) ao ajustamento dos dados coletados, o que verifica se estes são compatíveis com essa distribuição, em que a estatística teste (ET) utilizada é dada por,

$$X_k := \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - np_i)^2}{np_i}$$

sendo,

$$\sum_{j=1}^k X^2 = X_k^2$$

No teste do χ^2 , foram utilizados os níveis de significância usuais.

O software R (Disponível em: <<http://r-project.org/>>) foi empregado em todas análises estatísticas desta pesquisa.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a análise empírica do comportamento da vazão do ribeirão Norete, aplicou-se a leitura de observações, organização, cálculo e apresentação das características dos dados.

A tabela 1 apresenta as principais estatísticas descritivas dos dados. Observe-se que as medidas de localização, média e mediana não estão próximas, o que pode ser justificado pela alta variabilidade, indicando, assim, que os dados não possuem uma medida central. As medidas de assimetria e curtose indicam que os dados não seguem um modelo central.

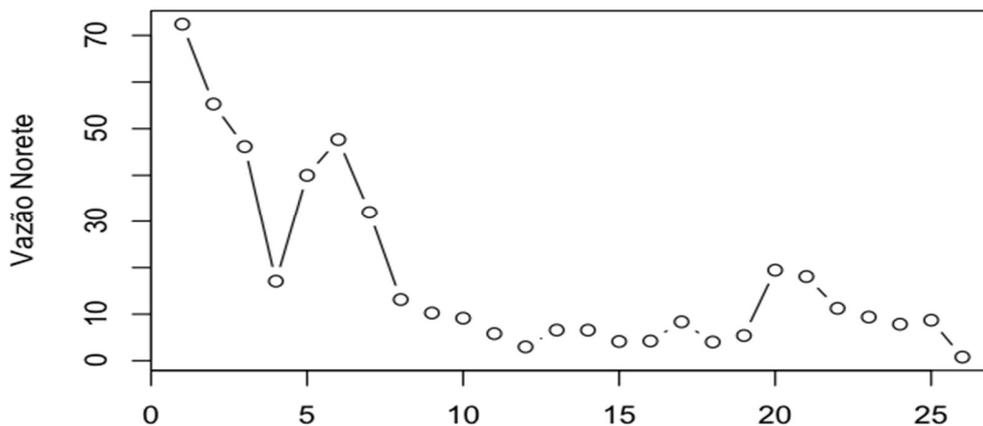
Tabela 1 – Estatísticas Descritivas

Média	36.24
Mediana	31.2
Desvio-Padrão	21.09441
Coef. de Assimetria	0.5683188
Curtose	0.6592257

Fonte: Elaboração própria.

Observa-se, pelo gráfico 1, o comportamento da vazão no período observado e se notam-se variações bruscas da vazão:

Gráfico 1 – Vazão Máxima do Ribeirão Norete



Fonte: Elaboração própria.

Este comportamento sazonal foi causado pela redução das precipitações no ano de 2016, inferiores ao que é registrado na região, como também a dos afluentes do ribeirão Norete, fazendo com que o fornecimento de água fosse interrompido antes do esperado.

Para inferir a estimativa dos parâmetros, utilizou-se o método da máxima verossimilhança, considerando-se os critérios de paragem $k = 0.01$ e $k = 0.005$ respectivamente, para o cálculo dos parâmetros α^* e β^* , obtidos nos passos $i = 327$ e $i = 468$, apresentados nas tabelas 2 e 3 respectivamente. Para o chute inicial dos parâmetros serem estimados utilizou-se a média e o desvio-padrão empírico.

Tabela 2 – Estimativas de Parâmetros Método da Verossimilhança

α^*	28.3558
β^*	15.08627

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 3 – Estimativas de Parâmetros Método da Verossimilhança

α^*	28.1513
β^*	14.9652

Fonte: Elaboração própria.

Para verificar se os dados realmente seguem um modelo Gumbel considerando o menor erro, $k = 0.005$, e com o nível de significância de 1%, aplicou-se o teste do χ^2 utilizando as hipóteses:

H_0 : A amostra provém de uma distribuição Gumbel
vs

H_1 : A amostra não provém de uma distribuição Gumbel

Encontrando-se:

Tabela 4 – Teste do χ^2

ET	12.02185
χ^2	15.08627

Fonte: Elaboração própria.

Como a estatística teste $ET_{obs} < \chi^2$, não rejeitamos a hipótese nula, logo é forte a evidência estatística de que os dados são bem ajustados a uma Gumbel.

4. CONCLUSÕES

As alterações ambientais decorrentes de ações antrópicas afetam diretamente os ciclos hidrológicos e climáticos, gerando irregularidade das chuvas. Isso faz com que a vazão fluvial se torne inconstante, o que altera a forma de trabalhar nas propriedades rurais, pois impede o

cultivo de muitos alimentos e ainda reduz a produção de leite, inviabilizando a otimização do empreendimento por parte do produtor rural.

Nesse sentido, o consumo consciente de água torna-se essencial em todas as práticas de mercado. Isso se aplica em particular à agricultura, a qual deve ser praticada de forma intensiva, aliando alta produtividade e responsabilidade no que tange à utilização dos recursos naturais. Assim, é imprescindível pensar na adoção de técnicas para a aplicação de uma irrigação responsável, que vise a otimização do uso da água, tornando possível alta produção, padronização e qualidade dos produtos e, principalmente, a produção em períodos de seca.

Para tanto, são necessários projetos que visem conscientizar a população rural da importância de se aplicarem técnicas agroambientais sustentáveis. É imprescindível que a chuva percole o solo quando precipitada, a fim de se abastecerem os lençóis freáticos e, por conseguinte, aumentar a disponibilidade de água nos mananciais que abastecem o ribeirão Norete. Ademais, é preciso preservar com qualidade as matas ciliares desses mananciais e aplicar corretamente as técnicas de irrigação. Esses projetos precisam de técnicas robustas de controle, em diferentes esferas, dada a complexidade do processo.

Nesse sentido, este trabalho objetivou a modelação da vazão do ribeirão Norete que pode ser utilizado como ferramenta robusta de controle e previsão. Devido à natureza sazonal dos dados, ajustou-se ao modelo de extremos, Gumbel, no qual se utilizou técnica numérica para aplicar o método da máxima verossimilhança na estimação dos dados do modelo. Para o nível de significância 1%, a $ET < \chi^2$ (tabela 4), assim não rejeitamos a hipótese de que a distribuição que ajusta os dados é uma Gumbel, com parâmetros otimizados para o modelo Gumbel (tabela 3), pelo método da verossimilhança, a partir de aplicação numérica para o cálculo deles.

O controle matemático de qualquer processo favorece a previsão adequada de futuras escassezes de água e mesmo de inundações de regiões. Em particular, o modelo Gumbel se traduz em uma ferramenta a ser utilizada para controle e previsão da vazão do ribeirão Norete, o que, combinado com projetos de práticas sustentáveis no consumo de água, viabilizará a gestão do uso visando a sustentação de propriedades locais e produtores rurais que dependem do ribeirão para a produção agrícola.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. Aleatoriedad, modelización, simulación. In: Actas: X Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>>. Acesso em: 19 Agosto de 2019.

BAPTISTA, M. B. **Fundamentos da engenharia hidráulica**. Belo Horizonte: UFMG, 2010.

COLLISCHONN, W; TASSI, R. **Introduzindo Hidrologia**. Porto Alegre: UFRGS, IPH. 2008.

HERNANDEZ,F.B.T; SOUZA, S. A. V ; ZOCOLER, J. A. Simulação e efeito de verânicos em culturas desenvolvidas na região de Palmeira d'oeste. *Engenharia Agrícola*, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 21, jul. 2003.

MAROCO, J. **Análise estatística: com utilização do SPSS**. 2. ed. Lisboa: Silabo, 2003.

NAGHETTINI, M. **Engenharia de recursos hídricos**. Belo Horizonte: UFMG, 1999.

R Project. **Projeto R para cálculos estatísticos**. Disponível em: <<http://r-project.org/>>. Acesso em: 25 de setembro de 2016.